方修政,姚刚,钮凤林等. 2023. 波场模拟有限差分参数优化选取. 地球物理学报,66(6):2520-2533,doi:10.6038/cjg2022Q0466.
Fang X Z, Yao G, Niu F L, et al. 2023. Estimating optimal parameters of finite-difference scheme for wavefield modeling. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese),66(6):2520-2533,doi:10.6038/cjg2022Q0466.

波场模拟有限差分参数优化选取

方修政[1,2], 姚刚[1,3], 钮凤林[1,3], 吴迪[1,4*]

1 中国石油大学(北京)油气资源与探测国家重点实验室, 北京 102249
2 长江岩土工程有限公司, 武汉 430010
3 中国石油大学(北京)非常规油气科学与技术研究院, 北京 102249
4 中国石油大学(北京)地球物理学院, 北京 102249

摘要 有限差分方法(Finite-difference Method,FD)广泛用于地震波场数值模拟,但其存在固有的数值频散问题,影响模拟的计算效率和数值精度.本文主要研究了有限差分方法的空间数值频散误差和网格划分精度以及差分算子的关系,基于计算量最小准则,提出了最优化有限差分参数选取流程,为有限差分数值模拟参数选取提供理论指导.本文主要工作包括:(1) 提出了空间数值频散正变换过程(Forward Space Dispersion Transform,FSDT)方法,该方法可以高效模拟出不同网格划分精度(波长采样点数)的带有空间数值频散的波场;(2) 提出了波场空间数值频散误差衡量准则,可以定量地判断出数值模拟导致的波形频散程度,选取合适的频散误差阈值;(3) 研究了给定空间数值频散误差阈值下,差分算子系数、差分算子阶数、网格划分精度与计算量之间的关系.文中基于雷米兹交换方法(Remez Exchange Method, RE)和泰勒级数展开方法(Taylor-series Expansion Method, TE)的差分系数,在空间数值频散误差阈值 0.01 时,数值模拟了不同差分算子阶数、网格划分精度与计算量的关系,并给出了有限差分参数选取的参考值.

关键词 高阶有限差分; 数值频散; 空间数值频散正变换; 优化参数选取
doi:10.6038/cjg2022Q0466 **中图分类号** P631 **收稿日期** 2022-06-17, 2022-10-19 收修定稿

Estimating optimal parameters of finite-difference scheme for wavefield modeling

FANG XiuZheng[1,2], YAO Gang[1,3], NIU FengLin[1,3], WU Di[1,4*]

1 *State Key Laboratory of Petroleum Resources and Prospecting, China University of Petroleum (Beijing), Beijing* 102249, *China*
2 *Changjiang Geotechnical Engineering CO., LTD, Wuhan* 430010, *China*
3 *Unconventional Petroleum Research Institute, China University of Petroleum (Beijing), Beijing* 102249, *China*
4 *College of Geophysics, China University of Petroleum (Beijing), Beijing* 102249, *China*

Abstract The finite-difference (FD) method is widely used for simulating complex wavefield propagation because of its high accuracy and efficiency. However, it suffers from numerical dispersions caused by spatial discretization with coarse grid sizes. The dispersions affect the computational efficiency and modeling accuracy. This study investigates the relationship among numerical dispersion error, FD operators, and the number of samples per shortest wavelength. Based on the criterion of minimum computational cost, we propose a scheme to estimate the optimal FD parameters, i. e., the number of samples per shortest wavelength and the spatial order of FD

基金项目 中石油集团前瞻性基础性项目"物探岩石物理与前沿储备技术研究"(2022DQ0604-02),国家自然科学基金项目(41974142, 42074129)和中国石油大学(北京)油气资源与探测国家重点实验室项目(PRP/indep-4-2012)联合资助.

第一作者简介 方修政, 男, 博士, 主要从事地震波传播理论与成像. E-mail: fangxiuzheng@live.com
* **通讯作者** 吴迪, 女, 博士, 副研究员, 主要从事地震波模拟与成像研究. E-mail: wudi@cup.edu.cn

operators. Firstly, we introduce a method called Forward Space Dispersion Transform (FSDT) to add spatial dispersion to the reference wavefield for various scenarios of grid spacing and FD orders; Secondly, we measure the normalized L2 norm of the error between the reference wavefield and dispersed wavefield, so we can estimate the dispersion error directly to set a proper error threshold; Finally, we study the relationship among FD coefficients, FD operator length, grid spacing, and computational cost to find out the optimal grid spacing and FD order for giving the minimum computational cost under a preset error threshold. We also show some numerical tests of the relationship among the FD operator length, grid points per shortest wavelength, and computational cost under an error threshold of 0.01 with the finite-difference coefficients generated using the Remez Exchange (RE) method and Taylor-series Expansion (TE) method. Based on the tests, some FD parameters are recommended.

Keywords High-order finite-difference; Numerical dispersion; Forward space dispersion transform; Optimal parameter estimation

0 引言

有限差分方法具有实施方便、计算效率高等优点，被广泛应用于地震波场的数值模拟（Virieux, 1984; Zhang and Yao, 2013a; Xu and Gao, 2018; Li et al., 2019; Zou et al., 2020; Ren et al., 2022; 徐世刚等，2022；王静等，2023）、逆时偏移成像（Zhang Y et al., 2011; Zhang Y B et al., 2021; Zhao et al., 2021; Wu et al., 2022）和全波形反演（Virieux and Operto, 2009; Warner et al., 2013; Yao et al., 2020; 任志明等，2021）. 但是，数值频散问题一直是影响有限差分数值模拟精度的主要因素之一. 有限差分数值频散是指，由于有限差分对偏微分近似的误差导致模拟的波场中不同频率信号的相速度不同. 频率越大的波场，其数值模拟的相速度和群速度之间的误差也越大，频散现象也就越严重. 有限差分对波动方程的时间方向和空间方向的数值频散表现形式不同. 时间方向的数值频散在波形上表现为“超前形式”的衰减正、余弦三角函数波形，而空间方向的数值频散则表现为“拖尾形式”的衰减正、余弦三角函数波形.

压制有限差分空间方向数值频散最直接的方法是缩小网格间距，提高网格划分精度. 但是精细网格划分会导致计算量增加，当数值模拟的模型相对较大时，其计算代价是巨大的. 为了解决精细网格划分导致的巨大计算代价问题和粗糙网格所导致的空间数值频散问题，旨在节约计算成本的同时高效率、高精度的模拟地震波场，许多学者提出了不同的处理方法和思路. 高阶差分算子是对 2 阶精度差分算子的发展，可以在相同网格划分精度下有效压制空间数值频散误差，例如：Alford 等（1974）研究了波动方程的空间 2 阶精度和 4 阶精度有限差分数值模拟，分析了有限差分的数值频散问题，指出相同精度情况下，4 阶空间精度网格间距可以是 2 阶精度网格间距的两倍. Dablain(1986)提出了基于泰勒级数展开方法求取高阶差分系数并进行了波动方程的高阶精度差分数值模拟，文中给出的高阶精度差分算子理论和数值模拟结果表明，高阶精度差分算子可以有效的压制数值频散.

随着高阶精度差分算子的发展，差分系数的优化逐渐得到了广泛关注. 常规的基于泰勒级数展开方法求取的差分系数在波数较小时较为精确，随着波数的增大，精度会迅速降低. 基于优化算法得到的差分系数在大波数范围的精度相对较高，可以在一定程度上压制高频成分波场空间数值频散. Holberg(1987)最早提出了优化差分系数压制数值频散的思想，文中用群速度误差作为目标函数得到优化的差分系数，相比于常规基于泰勒级数展开方法求取的差分系数，能更好的压制高波数成分在空间方向的数值频散. 在 Holberg(1987)研究工作基础上，越来越多的优化差分系数方法逐渐的发展起来. Kindelan 等（1990）利用 Minimax 准则，简化了 Holberg 的群速度误差目标函数优化差分系数的求取过程. Etgen(2007)建议利用相速度误差作为目标函数优化差分系数，进一步简化了优化差分系数的求取. 优化类方法求取差分系数，其目标函数的误差阈值大小直接影响着差分系数及有效带宽，一般来说，小的误差阈值对应着窄的有效带宽. Zhang 和 Yao(2013a, b)提出了在给定相速度误差阈值，如

0.0001,利用全局优化法进行高阶差分系数求取.目前,优化差分系数方法仍是压制有限差分数值模拟空间方向数值频散的主流方法,主要包括基于二范数(Least-squares Method,LS)(Zhou and Zhang, 2011; Liu, 2013, 2014; Yao et al., 2016)、最大范数(Remez Exchange Method,RE)(Kosloff et al., 2010; Yang et al., 2017; He et al., 2019; Liu, 2020; Wang et al., 2021)和最小范数(Miao and Zhang, 2020, 2022)的优化方案.雷米兹交换算法(RE)因其少数次迭代就能收敛以及比最小二乘等优化方法具有在更宽频带范围内压制空间数值频散能力的优点,是一种较广泛用于有限差分系数优化的方法.

波动方程有限差分数值模拟包括空间方向和时间方向的频散.Tal-Ezer(1986)、Tal-Ezer 等(1987)利用伪谱法进行了波动方程的数值模拟,可以有效的压制时间方向和空间方向的数值频散.Gazdag(1981)、Kosloff 和 Baysal(1982)提出空间导数用伪谱法来计算以压制空间方向的数值频散,借助快速傅里叶变换方法,同时可以一定程度上缓解计算效率问题(Reshef et al., 1988).Chen(2007)对比分析了三种时间方向采用高阶精度离散、空间方向采用伪谱方法离散的数值模拟算法,表明时间方向高阶精度可以压制时间方向数值频散,同时分析了不同算法精度和计算效率之间的差别.Liu 和 Sen(2011)提出了时空域变差分算子阶数优化方法,在低速区域采用高阶差分算子,在高速区域采用低阶差分算子,可以在不牺牲精度的条件下,提高计算效率.近些年,许多研究表明时间方向的数值频散和传播速度没有关系,只与频率和时间有关,因此以非常小的计算代价就可以完美的去除地震记录中时间方向的数值频散(Stork, 2013; Dai et al., 2014; Wang and Xu, 2015; Gao et al., 2016; Li et al., 2016; Koene et al., 2018; Amundsen and Pedersen, 2019; Mittet, 2019).

由于时间方向的数值频散误差可以通过后处理校正,本文主要研究了空间方向的数值频散和计算量之间的关系.针对空间方向的数值频散,本文提出一种新的空间数值频散正变换(Forward Space Dispersion Transform,FSDT)方法,该方法提出均匀模型中的空间方向加数值频散操作的解析表达式,可以直接计算出不同网格划分精度及不同差分算子阶数时的空间数值频散大小,高效计算模拟具有空间数值频散的波场.本文对基于雷米兹交换方法(Remez Exchange Method, RE)和泰勒级数展开方法(Taylor-series Expansion Method,TE)求取的差分系数进行了空间数值频散正变换计算模拟,高效率的计算出了不同有限差分参数(此处参数指差分算子阶数、波长采样点数等参数)的空间数值频散波场.依据合适空间数值频散误差阈值,结合有限差分不同离散参数下的计算量分析,可以给出有限差分最优化的参数选取指导理论.为了叙述简洁,本文称基于雷米兹交换(RE)方法计算得到的差分系数进行空间数值频散正变换过程(FSDT)为 RE-FSDT 方法;基于泰勒级数(TE)展开方法计算得到的差分系数进行空间数值频散正变换过程(FSDT)为 TE-FSDT 方法.

1 理论方法

以 1D 常密度声波方程为例,本文以 2 阶偏导数空间方向数值频散及其数值频散映射关系为基础,提出空间加数值频散公式.2 阶常密度声波方程为:

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = v^2(x)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

式中,$p(x,t)$ 为波场变量,$v(x)$ 是波场传播速度.空间 2 阶偏导数的 $2N$ 阶精度差分算子离散可以表示为:

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{c_0 p(x,t) + \sum_{l=1}^{N} c_l (p(x+l\Delta x,t) + p(x-l\Delta x,t))}{\Delta x^2}, \tag{2}$$

式中,c_0 和 c_l 为高阶差分算子系数,Δx 为空间离散步长.

对公式(2)进行傅里叶变换,并消除波场变量 p,可以得到加空间数值频散的正映射过程关系式:

$$k^2 \to \frac{-1}{\Delta x^2}\left(c_0 + 2\sum_{l=1}^{N} c_l \cos(kl\Delta x)\right), \tag{3}$$

其中,k 表示波数.对(3)式进行简化,研究正值波数,其波数映射关系可以表示为:

$$k \to \frac{1}{\Delta x}\sqrt{-c_0 - 2\sum_{l=1}^{N} c_l \cos(kl\Delta x)}. \tag{4}$$

基于(4)式加空间数值频散正映射关系式,可以得到任意精度阶数的有限差分方法模拟出来的带空间数值频散波场.称没有数值频散效应的波场 $p(x',t)$ 为参考波场,对参考波场加空间数值频散的正变换

过程可以表示为：

$$\hat{p}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x}\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\int_{0}^{X}p(x',t)\times\exp(-\mathrm{i}k'x')\mathrm{d}x',\tag{5}$$

式中，$k'=\frac{1}{\Delta x}\sqrt{-c_0-2\sum_{l=1}^{N}c_l\cos(kl\Delta x)}$，$X$ 为波场的最大空间范围.(5)式称为空间数值频散正变换过程(Forward Space Dispersion Transform，简称 FSDT).(5)式的实施过程为：代入正映射波数 k'，对参考波场 $p(x',t)$ 进行离散傅里叶变换，得到频率域波场后，用快速傅里叶算法反变换回时间域得到具有空间方向数值频散的波场 $\hat{p}(x,t)$.

数值频散通常用相速度和无频散的群速度比值大小来衡量，其物理意义明确，其比值越接近 1 数值频散误差越小. 例如：当采样点数保持一致时，有限差分算子阶数越高或者当有限差分算子阶数固定时，波长采样点数越多，速度比值越趋近 1，表示空间数值频散误差越小. 但是，用相速度比值衡量数值频散误差，不能直观的对比宽频带的数值频散波形和真实波形之间的误差，进而无法评判数值频散波场对于结果的影响程度. 本文建议用空间数值频散波场和真实波场的对比作为评判空间数值频散误差程度的依据，根据空间数值频散误差大小选取合适的误差阈值，指导我们选取有限差分参数. 我们利用空间数值频散波场和参考波场之间的归一化二范数来衡量空间数值频散误差，表达式如下：

$$Err=\sqrt{\sum_{i}\left(p(x_i,t)-\hat{p}(x_i,t)\right)^2\Big/\sum_{i}\hat{p}(x_i,t)^2}.\tag{6}$$

与基于单频率相速度误差衡量空间数值频散不同，这里给定的空间数值频散误差表达式代表全频带波场的数值频散形态，可以直观、定量地判断出数值模拟导致的波形空间方向数值频散程度. 给定不同的误差阈值，对应着不同的差分算子长度(阶数)，越小的误差阈值对应着越精细的网格划分、更高阶的差分算子. 当误差阈值给定后，网格划分精度和差分算子阶数(长度)会存在反比例关系，不同精度的网格和相对应的差分算子阶数会导致波动方程有限差分的计算量不同.

三维波动方程的计算量统计相对于一维和二维波动方程的计算量统计更加通用，对常密度三维波动方程进行中心差分格式离散：

$$p_{i,j,k}^{n+1}=2p_{i,j,k}^{n}-p_{i,j,k}^{n-1}+\frac{v^2\Delta t^2}{\Delta h^2}\sum_{l=1}^{N}c_l(p_{i+l,j,k}^{n}+p_{i-l,j,k}^{n}+p_{i,j+l,k}^{n}+p_{i,j-l,k}^{n}+p_{i,j,k+l}^{n}+p_{i,j,k-l}^{n})+c_0p_{i,j,k}^{n},\tag{7}$$

式中，$p_{i,j,k}^{n}$ 表示时间点 $t=n\Delta t$，空间坐标位置处 $(i\Delta x,j\Delta y,k\Delta z)$ 的波场变量. 由(7)式可见：每一个时间步长，每一个网格点上的计算量统计见表 1. 由表 1 可见三维比二维和二维比一维的加法运算量均多 $4\times N$，即维度的增加会导致加法运算量的增加. 为了便于统计计算量和差分算子阶数之间的关系，将加法运算量和乘法运算量的总和称为计算量，且不考虑计算机硬件、计算机指令等影响因素. 给定误差阈值后，波动方程有限差分的计算量和网格划分精度、有限差分系数及差分算子长度密切相关，因此可以搜索出最少计算量的网格划分精度、差分算子阶数. 下面将通过算例详细介绍此有限差分参数优选方案的具体实施过程.

表 1　运算量统计

Table 1　Number of arithmetic operations

不同维度方程	加法运算量	乘法运算量
一维	$3\times N+3$	$N+3$
二维	$7\times N+3$	$N+3$
三维	$11\times N+3$	$N+3$

2　数值模拟算例

2.1　差分系数

差分算子系数直接影响着空间数值频散大小，本文测试了基于雷米兹交换方法(RE)和泰勒级数展开方法(TE)的差分系数数值模拟. 本文测试使用的 TE 方法的 $2N$ 精度的差分系数(Liu，2020)可以通过(8)式进行计算：

$$\begin{cases}c_0=-2\sum_{n=1}^{N}c_n\\ c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\prod_{1\leqslant i\leqslant N,i\neq n}\left|\frac{i^2}{i^2-n^2}\right|\end{cases}.\tag{8}$$

本文测试使用的基于 RE 方法的 $2N=12\sim24$ 阶差分系数见表 2.

2.2　FSDT 方法空间数值频散模拟测试

为了验证空间数值频散正变换(FSDT)方法有效性，对一维波动方程分别利用有限差分方法和伪谱方法(Pseudo-Spectral Method，PS)进行数值模拟. 震源为 Ricker 子波，主频为 20 Hz，模型的传播速度为 2000 m·s^{-1}，空间采样间隔为 $\Delta h=6$ m，时间采样间隔为0.01 ms. 图1a为伪谱法和2阶精度

表2 2阶偏导数的中心差分算子的雷米兹交换方法差分系数($2N=12\sim24$阶精度)

Table 2 Remez exchange method FD coefficients of central-difference operator for the second partial derivative ($2N=12\sim24$)

差分系数	精度阶数						
	$2N=12$	$2N=14$	$2N=16$	$2N=18$	$2N=20$	$2N=22$	$2N=24$
c_0	−3.08567404	−3.13546354	−3.17049888	−3.19557676	−3.21402708	−3.22789034	−3.23841242
c_1	1.80490080	1.85080445	1.88374360	1.90764916	1.92541257	1.93885792	1.94911937
c_2	−0.32938272	−0.36521045	−0.39251710	−0.41319258	−0.42902907	−0.44128665	−0.45079990
c_3	0.08448092	0.10784253	0.12764668	0.14379201	0.15682499	0.16730741	0.17567973
c_4	−0.02064818	−0.03304081	−0.04541707	−0.05669729	−0.06654180	−0.07491935	−0.08189626
c_5	0.00389460	0.00897909	0.01546686	0.02241071	0.02917261	0.03539281	0.04087661
c_6	−0.00040840	−0.00185764	−0.00457368	−0.00824342	−0.01240476	−0.01665681	−0.02069872
c_7		0.00021460	0.00103068	0.00262046	0.00485956	0.00749850	0.01026837
c_8			−0.00013053	−0.00063864	−0.00164834	−0.00310188	−0.00484390
c_9				0.00008797	0.00043206	0.00111639	0.00210097
c_{10}					−0.00006428	−0.00031314	−0.00079756
c_{11}						0.00004997	0.00023791
c_{12}							−0.00004041

有限差分数值模拟的波场快照(分别用黑色实线和红色实线表示),从图中可以看出2阶精度有限差分数值模拟的波形尾部有空间数值频散现象.图1b中红色虚线为图1a有限差分数值模拟的波场快照,黑色实线为利用2阶精度FSDT对图1a中伪谱法模拟的波场添加空间数值频散后的波场快照,图1c为图1b中两个波场快照的差值.从图中可以看出FSDT方法模拟空间数值频散的有效性.

FSDT方法可以高效计算模拟具有空间数值频散的波场,下面展示了FSDT方法计算的不同参数下的空间数值频散波场.设置没有频散的Ricker子波作为参考波场,子波主频的2.5倍频率设为最高频率,其对应的采样点数用G表示.图2和图3给出了传播距离为1000 m时,FSDT方法模拟的不同差分算子阶数和不同网格划分精度下的空间数值频散波场.图2为采样点数$G=3.125$时,2、4、8、16阶精度差分算子模拟的波场快照和相对应的误差.从图2可以发现,随着差分算子阶数的增加,空间数值频散现象得到了有效的压制.图3为2阶精度差分算子时,$G=100$、10、5、2.5模拟的波场快照和相对应的误差.从图3可以看出精细的网格划分可以有效的压制空间数值频散.

2.3 RE FSDT和TE FSDT方法计算模拟

差分系数是高阶精度差分算子的基础.常规的基于泰勒级数展开方法求取的差分系数在波数较小时比较精确,随着波数的增大,则精度会逐渐降低.

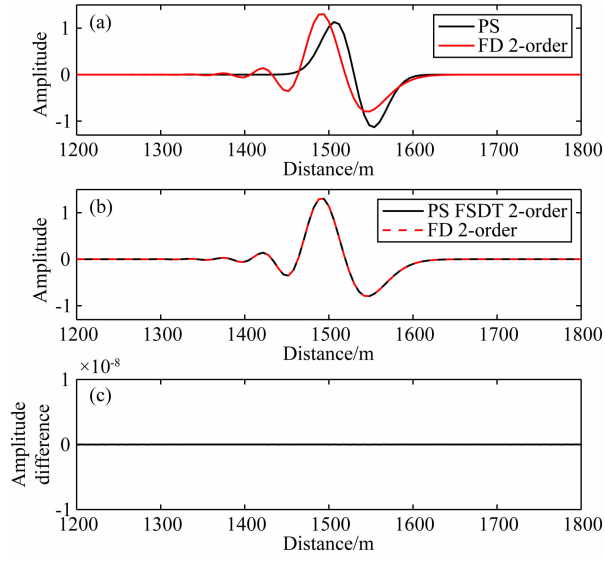

图1 FSDT方法模拟的2阶精度有限差分空间数值频散示意图

(a) 黑色实线和红色实线分别表示伪谱法和2阶精度有限差分数值模拟的波场快照;(b) 红色虚线为(a)中红色实线表示的波场快照,黑色实线为利用2阶精度FSDT对(a)中伪谱法模拟的波场添加空间数值频散后的波场快照;(c)为(b)中两个波场快照的差值.

Fig. 1 Simulating the spatial dispersion of the second-order accuracy finite-difference by using the FSDT method

(a) The solid black and red curves represent the wavefield snapshot using the pseudo-spectral method and the second-order accuracy finite-difference method, respectively. (b) The red dashed curve is the same snapshot as the red curve in (a), while the black curve represents the wavefield snapshot of the pseudo-spectral method in (a) after adding the second-order accuracy dispersion with FSDT. (c) The difference of the two wavefield snapshots in (b).

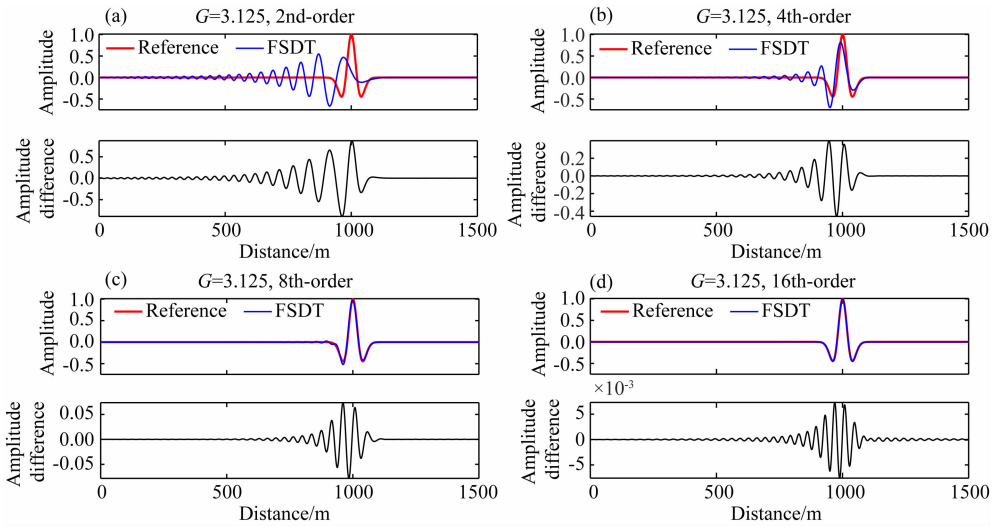

图 2　FSDT 方法模拟的空间数值频散波场示意图

(a)—(d)为采样点数 $G=3.125$ 时,FSDT 预测的 2、4、8 和 16 阶精度差分算子具有的空间数值频散波场快照(蓝色曲线),红色曲线是无频散参考波场快照,黑色曲线表示两波场之间的差值.

Fig. 2　The spatially dispersed wavefield simulated by using the FSDT method

(a)—(d) show the predicted spatially dispersed wavefield (blue curve) of the 2nd, 4th, 8th, and 16th order finite-difference operators simulated with the FSDT method, respectively. The red curve represents the dispersion-free reference wavefield snapshot. The corresponding difference between the two waveforms is indicated by the black curve. The sample number per shortest wavelength is $G=3.125$.

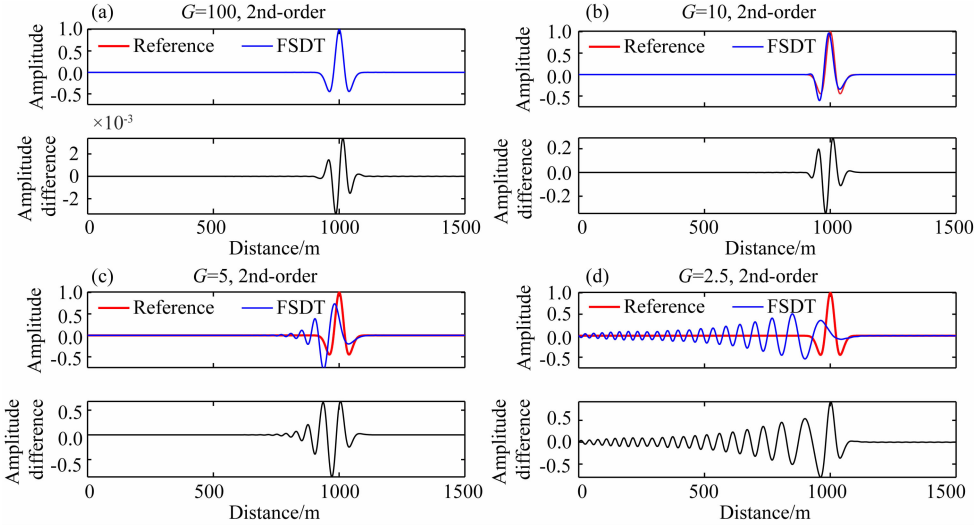

图 3　FSDT 方法模拟的 2 阶精度有限差分在不同网格大小下的空间数值频散波场示意图

(a)—(d) 分别表示 $G=100$、10、5 和 2.5 时,FSDT 方法预测的空间频散波场快照(蓝色曲线).红色曲线表示无频散参考波场快照,黑色曲线表示两波场之间的差值.

Fig. 3　The spatially dispersed wavefield simulated by using the FSDT method of 2nd order finite-difference with different grid size

(a)—(d) show the predicted spatially dispersed wavefield (blue curve) with the number of samples per shortest wavelength $G=100$, $G=10$, $G=5$, $G=2.5$. The red curve represents the dispersion-free reference wavefield snapshot. The corresponding difference between the two waveforms is indicated by the black curves.

基于最优化算法得到的差分系数在大波数范围精度相对较高,可以在一定程度上压制常规高阶有限差分数值模拟导致的高频成分波场空间数值频散严重的现象.图 4 为基于雷米兹交换方法(RE)和泰勒级数展开方法(TE)的 16 阶精度差分算子的空间数值频散曲线,可以看出优化类方法求取的差分系数可以一定程度上压制高频成分波场空间数值频散现象.在误差阈值为 0.0001 时,基于泰勒级数展开方

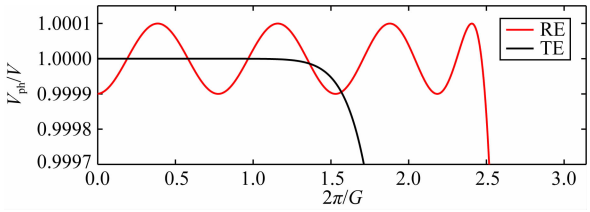

图4 雷米兹交换算法(RE)和泰勒级数展开方法(TE)的16阶精度空间数值频散曲线示意图

G 代表一个波长的采样点数.

Fig. 4 The numerical dispersion curves of the 16th-order accuracy RE and TE methods

G represents the number of samples per wavelength.

法,16阶精度差分算子的波长采样点数小于3.9时,误差就会迅速增加;相同差分算子阶数,基于优化类方法可以扩展波长采样点数到2.5,在一定程度上压制高频成分的空间数值频散误差.因此在计算效率上,优化类差分算子更具有优势.

基于FSDT方法具有高效率地计算空间数值频散的优点,利用误差公式(6),给定一个误差阈值,可以计算出不大于误差阈值的相对应差分算子阶数和网格划分精度.图5a展示了误差阈值为0.01,波场传播距离到3000 m时,RE FSDT方法和TE FSDT方法计算模拟得到的差分算子阶数和网格划分精度相对应的曲线关系,其中红色实线代表基于雷米兹交换(RE)方法的差分系数计算的差分算子阶数和网格划分精度曲线,黑色实线代表基于TE方法的差分系数计算的差分算子阶数和网格划分精度曲线.对比RE-FSDT方法和TE-FSDT方法得到的差分算子阶数和网格划分精度曲线,可以发现给定一个误差阈值,当差分算子阶数相同时,优化类差分系数需要的采样精度要小于泰勒级数展开方法需要的采样精度;当采样精度相同时,泰勒级数类差分系数相较于优化类差分系数需要更高的差分算子阶数.

从图5a中可以看出,由于差分算子阶数是$2N$整数倍离散,对应的曲线也会存在以整数2为阶梯值进行跳跃的现象.跳跃点处的网格划分精度值对应的误差临界值等于给定的误差阈值,其他非跳跃点处的网格划分精度值对应的误差小于给定误差阈值,也即非跳跃点处的误差小于跳跃点处的误差阈值.基于计算量公式(7),图5a对应的计算量曲线如图5b所示,红色实线为基于RE方法得到的差分系数进行波场模拟的计算量曲线,黑色实线为基于TE方法得到的差分系数进行波场模拟的计算量曲线.为了使计算量曲线尽量平滑,不受差分算子整数倍离散影响,图5b计算量曲线为图5a曲线跳跃点处的计算量值(即取在相同差分算子阶数、不同网格划分精度下最小计算量值),跳跃点间的计算量直接进行线性插值表示.从图可以看出,在一定范围的网格划分精度内,基于RE方法得到的差分系数进行数值模拟对应计算量小于TE方法,因为相同模型大小和相同误差阈值下,基于RE方法得到的差分系数可以采用较粗糙的网格大小进行有限差分数值模拟、计算效率更高.由于计算量曲线有极小值点,因此可以利用计算量曲线指导我们选取最优的有限差分数值模拟参数,即给定误差阈值,依据差分算子阶数和网格划分精度(波长采样点数)的关系以及相对应的计算量关系曲线,可以选取计算量极小值点处的差分算子阶数和网格划分精度作为有限差分数值模拟的最优参数.

图6为传播距离3000 m、误差阈值0.01时,最

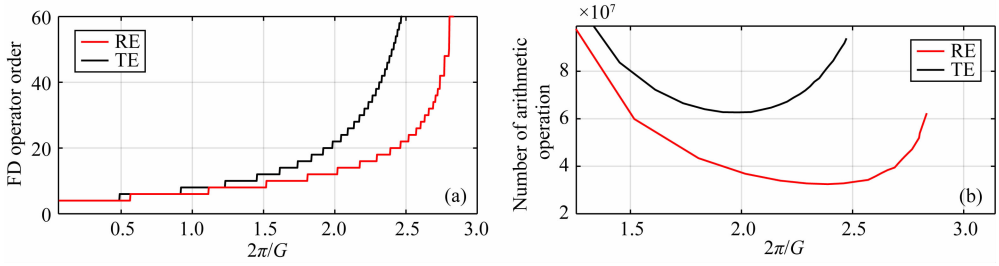

图5 设定误差阈值下,差分算子阶数、网格大小及计算量的关系图

(a) 基于RE和TE方法差分算子阶数和网格划分大小关系示意图;(b) 为图(a)的计算量曲线示意图.

20 Hz的Ricker子波,波场误差阈值0.01,波场传播距离为3000 m.

Fig. 5 The relationship between the orders of FD operators, the grid size, and the computational cost with a fixed error threshold

(a) The relationship between the orders of FD operators and the grid points per shortest wavelength with RE and TE; (b) The corresponding computational cost of (a). The wavelet is a 20-Hz Ricker. The wavefield error threshold is set to 0.01. The propagation distance is 3000 m.

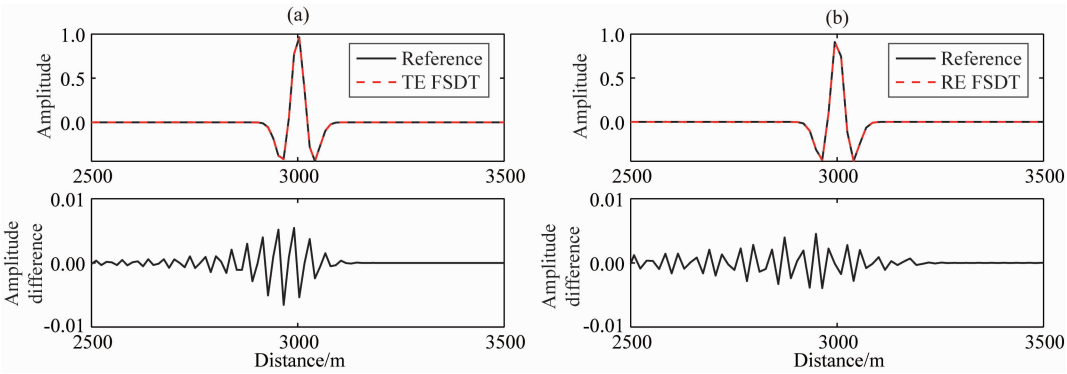

图 6　计算量最小参数对应的波场快照

(a) 参考波场快照(黑线)和空间频散波场快照(红色点线)(TE，$G=3.17$，$2N=20$)，(a)中第二行展示相对应的误差曲线；(b) 参考波场快照(黑线)和空间频散波场快照(红色点线)(RE，$G=2.63$，$2N=18$)，(b)中第二行展示相对应的误差曲线.

Fig. 6　The wavefield snapshot with the parameters of minimum computational cost

(a) The snapshots of the reference wavefield (black curve) and the spatially dispersed wavefield (red dotted curves) simulated by using TE FSDT in the case of the minimum computational cost (i. e. , $G=3.17$, $2N=20$). The plot of (a) in the second row shows the corresponding error curve. (b) The same as (a) but with RE FSDT in the case of minimum computational cost (i. e. , $G=2.63$, $2N=18$).

小计算量对应的差分算子阶数和最小波长采样点数的波场快照. 为了对比，图中用黑色实线表示无频散的理论 Ricker 作为参考波场. 图 6a 中红色虚线为基于 TE FSDT 方法计算得到的波场快照，对应的有限差分参数为采样点数 $G=3.17$，差分算子阶数为 $2N=20$. 相对应的误差曲线如图 6a 中第二行所示，绝对值误差最大值约为 0.005. 图 6b 中红色虚线为基于 RE FSDT 方法模拟得到的波场快照，对应的有限差分参数为采样点数 $G=2.63$，差分算子阶数为 $2N=18$. 相对应的误差曲线如图 6b 中第二行所示，绝对值误差最大值小于 0.005.

以上数值模拟算例均设置 Ricker 子波 2.5 倍主频为子波最高频率，随着采样频率逼近 2 倍最高频率(即其对应的奈奎斯特采样率)，高于最高频率的信号会产生假频. 为了去除 2.5 倍主频以上的高频信号能量对数值模拟结果的影响，我们设计低通滤波器对信号进行滤波处理. 设计的滤波器主要参数为：截止频率为 2.5 倍的 Ricker 子波主频，过渡带为 10 Hz，通带衰耗小于 0.00001 dB，阻带衰耗大于 120 dB. 图 7a 为对主频为 20 Hz 的 Ricker 子波进行低通滤波处理的滤波器幅频特性示意图. 利用该滤波器对主频为 20 Hz 的 Ricker 进行滤波处理，滤波前后振幅谱对比和波形对比分别如图 7b 和 7c 所示. 可以看出滤波处理后，截止频率 50 Hz 以上的频率成分被滤除.

和图 5 相同的处理方法和流程，误差阈值设为 0.01，采用 FSDT 方法对低通滤波后的 Ricker 进行加空间数值频散模拟，传播距离为 3000 m. 图 8a 展示了误差阈值为 0.01 时，利用 FSDT 方法计算得到的差分算子阶数和网格划分精度之间的曲线关系，其中红色实线代表基于 RE 方法差分系数计算的差分算子阶数和网格划分精度曲线，黑色实线代表基于 TE 方法差分系数计算的差分算子阶数和网格划分精度曲线. 对比曲线可以发现，当差分算子阶数相同时，RE 差分系数需要的网格划分精度要小于 TE 方法；当网格划分精度相同时，RE 差分系数需要的差分算子阶数小于 TE 方法. 随着网格划分精度的降低，RE 差分系数差分算子阶数明显小于 TE 方法的. 图 8a 和图 5a 曲线对比可以看出，需要提高网格划分精度或者增加差分算子阶数来压制空间数值频散和假频(2.5 倍主频以上的高频信号)耦合在一起的误差. 滤波处理可以去除假频，降低差分算子阶数或者空间网格划分精度. 这也从侧面反映了高频成分波场的空间数值频散压制需要更加精细的网格和更高阶的差分算子. 图 8a 对应的计算量曲线如图 8b 所示，红色实线为基于 RE 方法得到的差分系数进行有限差分数值模拟的计算量曲线，黑色实线为基于 TE 方法得到的差分系数进行有限差分数值模拟的计算量曲线. 图 8b 计算量曲线和图 5b 对比可以发现：滤去高频或者假频波场会一定程度上减少有限差分数值模拟的计算量，也即高频成分波场的空间数值频散压制需要耗费额外的计算量.

图 9 为传播距离 3000 m、误差阈值 0.01 时，最小计算量对应的差分算子阶数和最小波长采样点数的波场快照，图中用黑色实线表示无频散低通滤波后的 Ricker 作为参考波场. 图 9a 中红色虚线为 TE

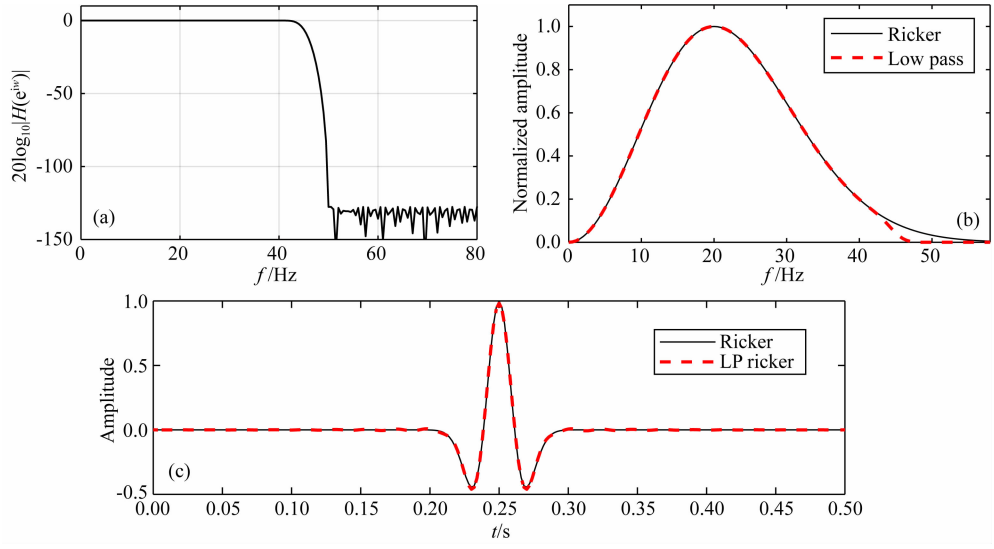

图7 低通滤波的Ricker子波

(a) 低通滤波器振幅谱;(b) 主频20 Hz Ricker子波低通滤波前后的振幅谱;(c) 主频20 Hz Ricker子波滤波前后波形.

Fig. 7 A low-pass filtered Ricker wavelet

(a) Amplitude spectra of the low-pass filter; (b) Amplitude spectrum of the 20-Hz Ricker wavelet before and after low-pass filtering; (c) Waveforms of the 20-Hz Ricker wavelet before and after low-pass filtering.

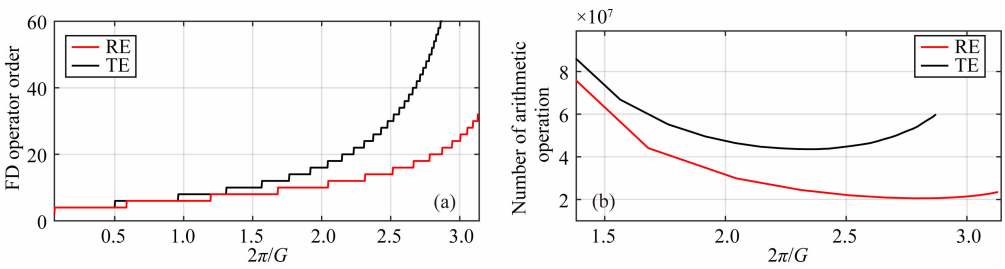

图8 设定误差阈值下,差分算子阶数、网格大小及计算量的关系图

(a) 基于RE和TE方法差分算子阶数和网格划分大小关系示意图;(b) 为(a)的计算量曲线示意图.子波为低通滤波后的20 Hz的Ricker子波(图7),波场误差阈值0.01,波场传播距离为3000 m.

Fig. 8 The relationship between the orders of FD operators, the grid size, and the computational cost with a fixed error threshold

(a) The relationship between the orders of FD operators and the grid points per shortest wavelength with RE and TE; (b) The corresponding computational cost of (a). The wavelet is a low-pass filtered 20-Hz Ricker, the spectra of which is shown in Fig. 7. The wavefield error threshold is 0.01. The propagation distance is 3000 m.

FSDT方法计算得到的波场快照($G=2.65$, $2N=24$).相对应的误差曲线如图9a中第二行所示,绝对值误差最大值约为0.005.图9b中红色虚线为RE FSDT方法计算模拟的波场快照($G=2.26$, $2N=18$).相对应的误差曲线如图9b中第二行所示,绝对值误差最大值小于0.005.

2.4 最优算子长度和采样点数

有限差分数值频散随着传播时间的增加,误差会逐渐积累.传播时间越长,数值频散误差越大,波形畸变越严重.因此长时间或者长距离的有限差分波场数值模拟,需要更高阶的差分算子或者更高精度的空间网格划分.图10和11给出了误差阈值0.01时,不同传播距离情况下,最小计算量对应的差分算子阶数和网格划分精度.从图10和11可见,随着传播距离的增加,差分算子逐渐增加,在每一个传播距离临界点(差分算子阶数增加2)处,高阶差分算子阶数的增加伴随着对于网格划分精度要求的降低;相同长度(阶数)的差分算子情况下,传播距离越大,网格精度要求越高;图10a和10b分别展示了Ricker子波随着传播距离增加,TE方法和RE方法差分系数需要的差分算子阶数和网格划分精度曲线.基于优化类方法的差分系数数值模拟对于网格划分(波场采样点数)精度要求较小,例如2000 m的传播距离,TE方法差分系数要求差分算子阶数18阶、$G=$

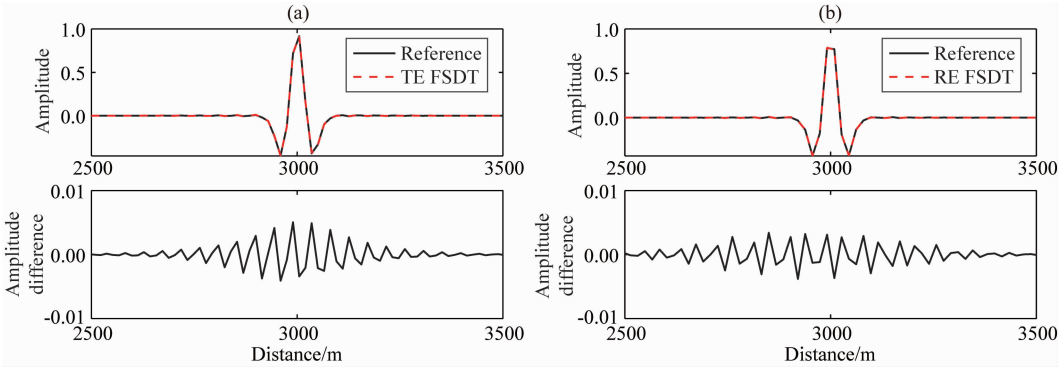

图 9　计算量最小对应的波场快照

(a) 参考波场快照(黑线)和空间频散波场快照(红色点线)(TE, $G=2.65$, $2N=24$), (a) 中第二行展示相对应的误差曲线;

(b) 参考波场快照(黑线)和空间频散波场快照(红色点线)(RE, $G=2.26$, $2N=18$), (b) 中第二行展示相对应的误差曲线.

Fig. 9　The wavefield snapshot with the minimum computational cost

(a) The snapshots of the reference wavefield (black curve) and the spatially dispersed wavefield (red dotted curves) simulated by using TE FSDT in the case of the minimum computational cost (i. e., $G=2.65$, $2N=24$). The plot of (a) in the second row shows the corresponding error curve. (b) The same as (a) but with RE FSDT in the case of minimum computational cost (i. e., $G=2.26$, $2N=18$).

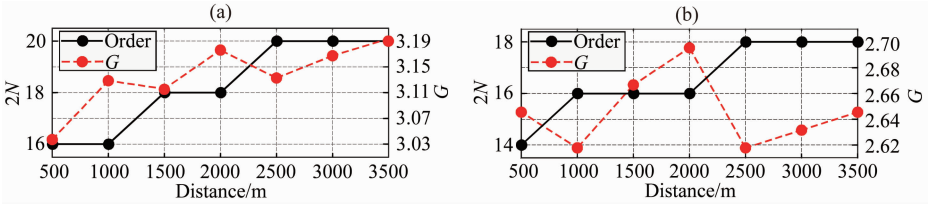

图 10　误差阈值 0.01,常规 Ricker 子波在不同传播距离对应的最小计算量的差分算子阶数和最小波长采样点数

(a) 基于 TE 方法的差分系数;(b) 基于 RE 方法的差分系数.

Fig. 10　The orders of FD operators and grid points per shortest wavelength for the minimum computational cost at different propagation distances with an original Ricker wavelet. The error threshold is 0.01

The finite difference coefficients are with (a) TE and (b) RE methods.

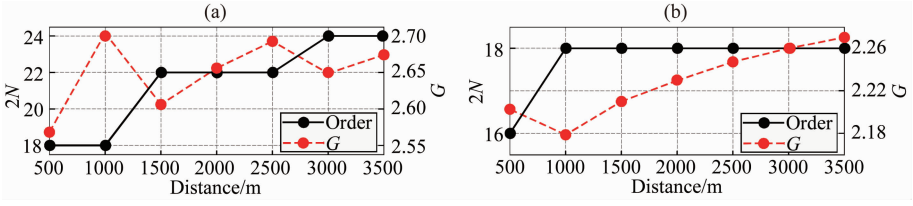

图 11　低通滤波的 Ricker 子波在不同传播距离对应的最小计算量的差分算子阶数和最小波长采样点数,滤波截止频率为 2.5 倍主频(即 50 Hz),误差阈值 0.01

(a) 基于 TE 方法的差分系数;(b) 基于 RE 方法的差分系数.

Fig. 11　The orders of FD operators and grid points per shortest wavelength for the minimum computational cost at different propagation distances with a low-pass-filtered Ricker wavelet. The stop frequency is 2.5 times the dominate frequency (i. e., 50 Hz). The error threshold is set to 0.01

The finite difference coefficients are with (a) TE and (b) RE methods.

3.18,RE 方法差分系数要求差分算子阶数 16 阶、$G=2.7$. 图 11a 和 11b 分别展示了截止频率为 2.5 倍子波主频,低通滤波后的 Ricker 子波随着传播距离增加,TE 方法和 RE 方法差分系数需要的差分算子阶数和网格划分精度曲线. 和上面的讨论一致,基于优化类方法的差分系数数值模拟对于网格划分精度要求较小,例如 2000 m 的传播距离,TE 方法差分系数要求差分算子阶数 22 阶、$G=2.65$,RE 方法差分系数要求差分算子阶数 18 阶、$G=2.23$.

从图 10 和 11 可见:对于 2 阶常密度声波方程,中心差分网格的有限差分数值模拟,震源为主频 20 Hz 的 Ricker 时,建议有限差分参数为:TE 方法差分系数的差分算子阶数为 16～20 阶,波长采样点数为 3～3.2,详见图 10a;RE 方法差分系数的差分算

子阶数为14～18阶,波长采样点数为2.6～2.7,详见图10b.主频低于20 Hz时可以适当降低差分算子阶数和网格划分精度;主频高于20 Hz时可以适当增加差分算子阶数和网格划分精度.对Ricker子波以2.5倍主频为截止频率进行低通滤波后,建议有限差分参数为:TE方法差分系数的差分算子阶数为18～24阶,波长采样点数为2.5～2.7,详见图11a;RE方法差分系数的差分算子阶数为16～18阶,波长采样点数为2.1～2.3,详见图11b.同时,从以上对比分析可以看出,相同大小空间数值频散误差阈值,优化类差分系数相对于常规TE方法差分系数,差分算子阶数低、采样点数少,在计算效率上更具有优势.因此,FD数值模拟应优先选择优化类差分系数.

2.5 二维Marmosi模型测试

为验证优化选取的有限差分参数适用于复杂模型的数值模拟,这里对二维Marmousi速度模型进行了数值模拟测试.图12为Marmousi速度模型以及波场传播1 s的波场快照.Marmousi速度模型大小为:深度方向187网格点数,水平方向248网格点数.如图12a所示,在左上角网格点位置(1,1)处激发震源,震源为Ricker子波,主频为20 Hz.速度模型右上角、右下角分别布置一个检波器并标记为检波器1和2.图12a给出了网格划分间距11.11 m时的速度模型,图12b给出了有限差分数值模拟的波场快照.这里测试2.4节讨论给出的有限差分参数并给出两种方案(方案A和方案B)数值模拟的波场记录对比分析,其中方案A:TE方法差分系数、差分算子阶数16阶、$G=3.18$(网格划分间距9.43 m);方案B:RE方法差分系数、差分算子阶数16阶、$G=2.7$(网格划分间距11.11 m).为清楚、直观的验证本文方法的有效性,使用伪谱法(PS)数值模拟的波场作为参考波场,对检波器位置的单道波场记录进行对比分析.图13为方案A,检波器1和2处单道波场记录对比分析;图14为方案B,检波器1和2处单道波场记录对比分析.从图13和图14可见:基于FSDT方法得出的优化有限差分参数同样适合复杂模型.从单道波形记录以及空间数值频散误差曲线可见:空间数值频散误差和前面理论计算分析基本一致,验证了本文方法对于复杂模型FD数值模拟的适用性.值得说明的是,本文建议的空间数值频散误差阈值相对严格(为0.01),根据实际情况,空间数值频散误差阈值可以选取相对宽松些(即大于0.01),在满足数值模拟相对精度的条件下,可以进一步减少计算量,提高计算效率.

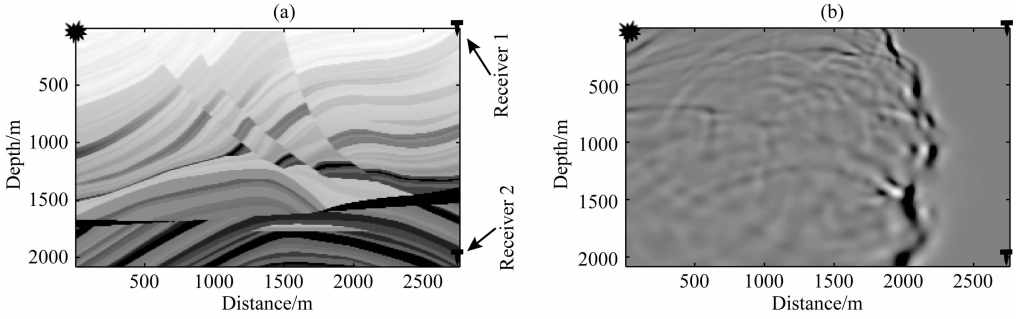

图12 (a) Marmousi速度模型及(b)传播时间1 s的波场快照

Fig. 12 (a) Marmousi velocity model and (b) wavefield snapshot at 1 second

3 结论

本文提出了FSDT方法,可以高效率的模拟出不同差分算子阶数和波长采样点数(网格划分精度)的空间数值频散波场,利用全频带波场衡量空间数值频散误差的大小,基于最小计算量关系,可以得到优化的有限差分数值模拟参数.

本文提出了最小计算量准则的有限差分参数优化选取的方法流程:(1)基于一定的震源子波和差分系数,利用FSDT方法添加空间数值频散到波场;(2)给定一个空间数值频散误差阈值(建议公式(6),阈值0.01),计算相对应的差分算子阶数和网格划分精度(波长采样点数);(3)依据差分算子阶数和网格划分精度相对应的最小计算量准则,选取出最优的有限差分参数.本文建议的空间数值频散误差阈值为0.01,相对严格,根据对数值模拟精度的要求,可以适当的调整空间数值频散误差阈值大小.

References

Alford R M, Kelly K R, Boore D M. 1974. Accuracy of finite-

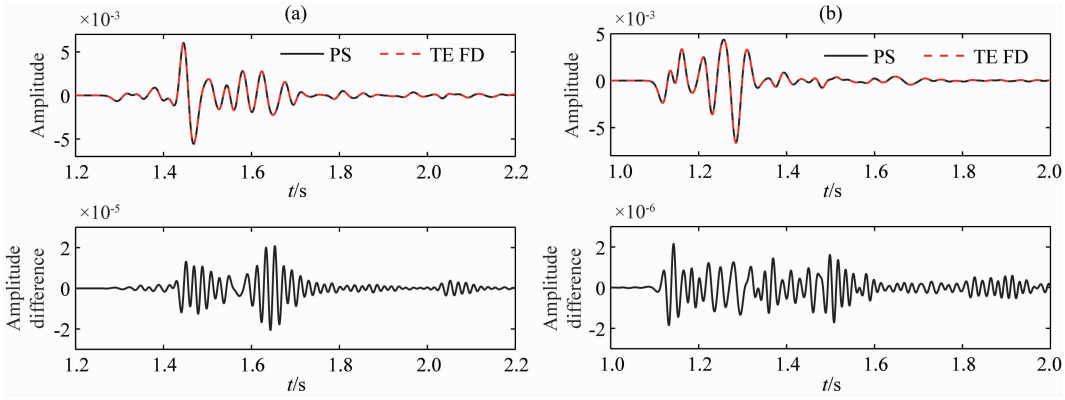

图 13　单道波场记录对比(TE，$G=3.18$，$2N=16$)

(a) 检波器 1 处波场记录和对应的波场差值；(b) 检波器 2 处波场记录和对应的波场差值. 第一行图中黑色曲线表示用伪谱法计算的波形，而红色虚线表示用 TE 差分法计算的波形. 第二行图黑色线展示了两种计算方法结果波形的差值.

Fig. 13　The single trace waveform comparison (TE, $G=3.18$, $2N=16$)

(a) Recorded waveforms and waveform difference at Receiver 1; (b) The same as (a) but for Receiver 2. The black curve in the top row shows the waveform computed with the pseudo-spectral method, while the dashed red curve displays the waveform computed with the TE finite-difference method. The black curve in the second row shows the difference between the two waveforms.

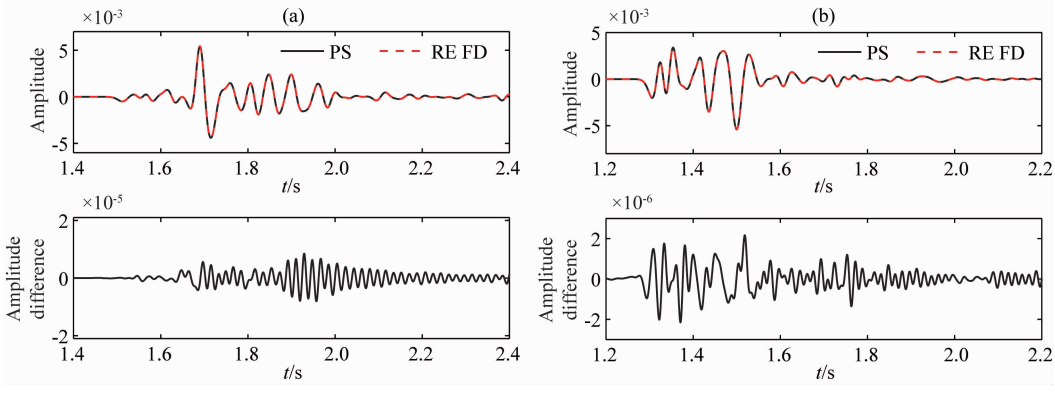

图 14　单道波场记录对比(RE，$G=2.7$，$2N=16$)

(a) 检波器 1 处波场记录和对应的波场差值；(b) 检波器 2 处波场记录和对应的波场差值. 第一行图中黑色曲线表示用伪谱法计算的波形，而红色虚线表示用 RE 差分法计算的波形. 第二行图黑色线展示了两种计算方法结果波形的差值.

Fig. 14　The single trace waveform comparison (RE, $G=2.7$, $2N=16$)

(b) Recorded waveforms and waveform difference at Receiver 1; (b) The same as (a) but for Receiver 2. The black curve in the top row shows the waveform computed with the pseudo-spectral method, while the dashed red curve displays the waveform computed with the RE finite-difference method. The black curve in the second row shows the difference between the two waveforms.

difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39(6): 834-842, doi: 10.1190/1.1440470.

Amundsen L, Pedersen Ø. 2019. Elimination of temporal dispersion from the finite-difference solutions of wave equations in elastic and anelastic models. *Geophysics*, 84(2): T47-T58, doi: 10.1190/geo2018-0281.1.

Chen J B. 2007. High-order time discretizations in seismic modeling. *Geophysics*, 72(5): SM115-SM122, doi: 10.1190/1.2750424.

Dablain M A. 1986. The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51(1): 54-66, doi: 10.1190/1.1442040.

Dai N X, Wu W, Liu H F. 2014. Solutions to numerical dispersion error of time FD in RTM. // SEG Technical Program Expanded Abstracts. SEG, 4027-4031, doi: 10.1190/segam2014-0858.1.

Etgen J T. 2007. A tutorial on optimizing time domain finite-difference schemes: "Beyond Holberg". SEP Report 129, 33-43.

Gao Y J, Zhang J H, Yao Z X. 2016. Third-order symplectic integration method with inverse time dispersion transform for long-term simulation. *Journal of Computational Physics*, 314: 436-449, doi 10.1016/j.jcp.2016.03.031.

Gazdag J. 1981. Modeling of the acoustic wave equation with transform methods. *Geophysics*, 46(6): 854-859, doi: 10.1190/1.1441223.

He Z, Zhang J H, Yao Z X. 2019. Determining the optimal coefficients of the explicit finite-difference scheme using the Remez exchange algorithm. *Geophysics*, 84(3): S137-S147, doi: 10.1190/geo2018-0446.1.

Holberg O. 1987. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale

simulation of wave phenomena. *Geophysical Prospecting*, 35(6): 629-655, doi: 10.1111/j.1365-2478.1987.tb00841.x.

Kindelan M, Kamel A, Sguazzero P. 1990. On the construction and efficiency of staggered numerical differentiators for the wave equation. *Geophysics*, 55(1): 107-110, doi: 10.1190/1.1442763.

Koene E F M, Robertsson J O A, Broggini F, et al. 2018. Eliminating time dispersion from seismic wave modeling. *Geophysical Journal International*, 213(1): 169-180, doi: 10.1093/gji/ggx563.

Kosloff D, Pestana R C, Tal-Ezer H. 2010. Acoustic and elastic numerical wave simulations by recursive spatial derivative operators. *Geophysics*, 75(6): T167-T174, doi: 10.1190/1.3485217.

Kosloff D D, Baysal E. 1982. Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics*, 47(10): 1402-1412, doi: 10.1190/1.1441288.

Li Q Y, Wu G C, Wu J L, et al. 2019. Finite difference seismic forward modeling method for fluid-solid coupled media with irregular seabed interface. *Journal of Geophysics and Engineering*, 16(1): 198-214, doi: 10.1093/jge/gxy017.

Li Y E, Wong M, Clapp R. 2016. Equivalent accuracy at a fraction of the cost: Overcoming temporal dispersion. *Geophysics*, 81(5): T189-T196, doi; 10.1190/GEO2015-0398.1.

Liu Y, Sen M K. 2011. Finite-difference modeling with adaptive variable-length spatial operators. *Geophysics*, 76(4): T79-T89, doi: 10.1190/1.3587223.

Liu Y. 2013. Globally optimal finite-difference schemes based on least squares. *Geophysics*, 78(4): T113-T132, doi: 10.1190/geo2012-0480.1.

Liu Y. 2014. Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on least-squares for wave equation modelling. *Geophysical Journal International*, 197(2): 1033-1047, doi: 10.1093/gji/ggu032.

Liu Y. 2020. Acoustic and elastic finite-difference modeling by optimal variable-length spatial operators. *Geophysics*, 85(2): T57-T70, doi: 10.1190/geo2019-0145.1.

Miao Z Z, Zhang J H. 2020. Reducing error accumulation of optimized finite-difference scheme using the minimum norm. *Geophysics*, 85(5): T275-T291, doi: 10.1190/GEO2019-0758.1.

Miao Z Z, Zhang J H. 2022. Optimizing finite-difference scheme in multidirections on rectangular grids based on the minimum norm. *Geophysics*, 87(4): F41-F54, doi: 10.1190/GEO2021-0283.1.

Mittet R. 2019. Second-order time integration of the wave equation with dispersion correction procedures. *Geophysics*, 84(4): T221-T235, doi: 10.1190/geo2018-0770.1.

Ren Z M, Dai X, Bao Q Z, et al. 2021. Time and space dispersion in finite difference and its influence on reverse time migration and full-waveform inversion. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 64(11): 4166-4180, doi: 10.6038/cjg2021P0041.

Ren Z M, Dai X, Bao Q Z. 2022. Source wavefield reconstruction based on an implicit staggered-grid finite-difference operator for seismic imaging. *Petroleum Science*, 19(5): 2095-2106, doi: 10.1016/j.petsci.2022.05.008.

Reshef M, Kosloff D, Edwards M, et al. 1988. Three-dimensional acoustic modeling by the Fourier method. *Geophysics*, 53(9): 1175-1183, doi: 10.1190/1.1442557.

Stork C. 2013. Eliminating nearly all dispersion error from FD modeling and RTM with minimal cost increase. //75th EAGE Conference and Exhibition. EAGE, doi: 10.3997/2214-4609.20130478.

Tal-Ezer H. 1986. Spectral methods in time for hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(1): 11-26, doi: 10.1137/0723002.

Tal-Ezer H, Kosloff D, Koren Z. 1987. An accurate scheme for seismic forward modelling. *Geophysical Prospecting*, 35(5): 479-490, doi: 10.1111/j.1365-2478.1987.tb00830.x.

Virieux J. 1984. *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49(11): 1933-1942, doi: 10.1190/1.1441605.

Virieux J, Operto S. 2009. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6): WCC1-WCC26, doi: 10.1190/1.3238367.

Wang M X, Xu S. 2015. Finite-difference time dispersion transforms for wave propagation. *Geophysics*, 80(6): WD19-WD25, doi: 10.1190/geo2015-0059.1.

Wang W H, Wen X T, Tang C, et al. 2021. Variable-order optimal implicit finite-difference schemes for explicit time-marching solutions to wave equations. *Geophysics*, 86(2): T91-T106, doi: 10.1190/GEO2020-0239.1.

Wang J, Liu Y, Zhou H Y. 2023. Temporal and spatial high-order accuracy implicit finite-difference method for modeling acoustic wave equation on rectangular staggered-grid. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 66(1): 368-382, doi: 10.6038/cjg2022P0778.

Warner M, Ratcliffe A, Nangoo T, et al. 2013. Anisotropic 3D full-waveform inversion. *Geophysics*, 78(2): R59-R80, doi: 10.1190/geo2012-0338.1.

Wu B, Yao G, Cao J J, et al. 2022. Huber inversion-based reverse-time migration with de-primary imaging condition and curvelet-domain sparse constraint. *Petroleum Science*, 19(4): 1542-1554, doi: 10.1016/j.petsci.2022.03.004.

Xu W H, Gao J H. 2018. Adaptive 9-point frequency-domain finite difference scheme for wavefield modeling of 2D acoustic wave equation. *Journal of Geophysics and Engineering*, 15(4): 1432-1445, doi: 10.1088/1742-2140/aab015.

Xu S G, Bao Q Z, Ren Z M, et al. 2022. Simulating elastic wave using temporal high accuracy and implicit spatial rectangular staggered-grid finite-difference approaches. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 65(4): 1389-1401, doi: 10.6038/cjg2022P0168.

Yang L, Yan H Y, Liu H. 2017. Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on the minimax approximation method with the Remez algorithm. *Geophysics*, 82(1): T27-T42, doi: 10.1190/geo2016-0171.1.

Yao G, Wu D, Debens H A. 2016. Adaptive finite difference for seismic wavefield modelling in acoustic media. *Scientific Reports*, 6(1): 30302, doi: 10.1038/srep30302.

Yao G，Wu D，Wang S X. 2020. A review on reflection-waveform inversion. *Petroleum Science*，17(2)：334-351，doi：10.1007/s12182-020-00431-3.

Zhang J H，Yao Z X. 2013a. Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling. *Geophysics*，78(1)：A13-A18，doi：10.1190/geo2012-0277.1.

Zhang J H，Yao Z X. 2013b. Optimized explicit finite-difference schemes for spatial derivatives using maximum norm. *Journal of Computational Physics*，250：511-526，doi：10.1016/j.jcp.2013.04.029.

Zhang Y，Zhang H Z，Zhang G Q. 2011. A stable TTI reverse time migration and its implementation. *Geophysics*，76(3)：WA3-WA11，doi：10.1190/1.3554411.

Zhang Y B，Liu Y K，Yi J，et al. 2021. First-order multiples imaging aided by water bottom. *Petroleum Science*，18(6)：1650-1661，doi：10.1016/j.petsci.2021.09.036.

Zhao Y，Niu F L，Fu L，et al. 2021. Local events-based fast RTM surface-offset gathers via dip-guided interpolation. *Petroleum Science*，18(3)：773-782，doi：10.1007/s12182-021-00557-y.

Zhou H B，Zhang G Q. 2011. Prefactored optimized compact finite-difference schemes for second spatial derivatives. *Geophysics*，76(5)：WB87-WB95，doi：10.1190/geo2011-0048.1.

Zou Q，Huang J P，Yong P，et al. 2020. 3D elastic waveform modeling with an optimized equivalent staggered-grid finite-difference method. *Petroleum Science*，17(4)：967-989，doi：10.1007/s12182-020-00477-3.

附中文参考文献

任志明，戴雪，包乾宗等. 2021. 有限差分的时间和空间频散及其对逆时偏移和全波形反演的影响. 地球物理学报，64(11)：4166-4180，doi：10.6038/cjg2021P0041.

王静，刘洋，周泓宇. 2023. 时间-空间高阶精度矩形交错网格隐式有限差分声波正演模拟. 地球物理学报，66(1)：368-382，doi：10.6038/cjg2022P0778.

徐世刚，包乾宗，任志明等. 2022. 基于时间高精度-空间隐式矩形交错网格有限差分的弹性波数值模拟. 地球物理学报，65(4)：1389-1401，doi：10.6038/cjg2022P0168.

（本文编辑　何燕）